

Matematică pentru performanță clasa a VI-a

*– Da, toți oamenii pot învăța
matematică. Numai că unii pot,
vor și reușesc s-o învețe de
nota 1-2, alții, și aceștia sunt
majoritatea, de nota 5-6 și
o mică parte, foarte puțini,
de nota 9-10.*

Grigore Moisil

Cuprins

Argumente.....	5
Lista autorilor	7
Ce aduce nou matematica de clasa a VI-a	9
Definiția	10
Ce este o demonstrație?	11
Trebuie să știi formulele?	12
Teorema, cărămida matematicii	13
Alege și îmbină strategiile utile	14
Numerele naturale și operații cu ele	20
Divizibilitatea numerelor	25
Numere prime	29
În căutarea numerelor prime	36
Rapoarte și proporții	40
Procente	44
Numere întregi	47
Târzia recunoaștere a numerelor negative	50
Media aritmetică	51
Numerele raționale și operațiile cu ele	54
Utilitatea desenului în geometrie	59
Geometria pe dreaptă	61
Unghiuri	64
Recomandări pentru tine	69
Geometria pe bază de raționament	70
Geometria pe bază de raționament și acțiune	76

Rigla, compasul, echerul	83
La începuturi	88
Probleme vechi și noi de numărare	89
Probleme de cântărire	94
Sume	98
Utilizează simetria – a 16-a strategie	100
Metoda reducerii la absurd	107
O celebră demonstrație prin reducere la absurd	110
Metoda triunghiurilor congruente	111
Principii în matematica gimnaziului	114
Principiul extremal	114
Principiul invarianților	117
Principiul mijloacelor și procedeele minime	123
Portofoliu cu tehnici	128
Tehnica cleștelui	128
Colorarea tablelor	131
Propune-ți o ordonare	133
Calea descendentă	135
Probleme ca la concurs	138
Soluții comentate	149
Bibliografie	307

Alege și îmbină strategiile utile

Acum la începutul clasei a VI-a cunoști și dispui de 15 strategii de rezolvare a problemelor:

1. *Ghicește și verifică*
2. *Desfă problema în probleme mai simple*
3. *Realizează un desen*
4. *Caută o regulă*
5. *Utilizează un număr necunoscut*
6. *Întocmește o listă*
7. *Utilizează un raționament direct*
8. *Utilizează un raționament indirect*
9. *Trasează o diagramă*
10. *Utilizează mersul înapoi*
11. *Utilizează proprietățile numerelor*
12. *Figurează mărimile și relațiile dintre ele*
13. *Studiază toate cazurile posibile*
14. *Găsește și rezolvă ecuația*
15. *Utilizează o formulă*

Cât de curând te vei familiariza cu a 16-a strategie:

16. *Utilizează simetria*

În cele ce urmează îți propunem un set de probleme ce recapitulează matematica de concurs a clasei a V-a, și în care, așa cum se întâmplă în majoritatea cazurilor, trebuie utilizate și combinate mai multe strategii.

1. Calculează diferența:

$$2014 \cdot 201520152015 - 2015 \cdot 2014201402014$$

2. Iei un număr $n < 100$. Îl împarți la 3 și îmi zici restul (r_1). Noul cât îl împarți la 3 și-mi zici noul rest (r_2). Din nou, câtul obținut îl împarți

la 3 și-mi comunică și al treilea rest obținut (r_3). În fine, când obții câtul 0, îmi spui din nou restul.

Pe baza resturilor obținute, eu îți pot determina numărul la care te-ai gândit.

Cum procedez eu?

Efectuez suma de produse $1 \cdot r_1 + 3 \cdot r_2 + 9 \cdot r_3 + \dots$ și determin numărul.

Poți să explici pe ce se bazează calculul meu?



3. Observă regula și mai scrie încă trei numere:

01, 04, 09, 16, 21, 24, ...

4. Am scris un număr pe caiet, apoi am „alipit” la dreapta lui cifra 9. Numărul astfel obținut l-am împărțit la 13 și am obținut un cât și restul 0. La numărul pe care-l reprezintă câtul, „alipesc” la dreapta lui cifra 1. Împart noul număr la 11 și obțin un cât și restul 0. Dacă la numărul pe care-l reprezintă acest nou cât alipesc la stânga lui cifrele 1 și 5, obțin pătratul numărului 39. Ce număr am scris pe caiet?

5. Găsește aranjări a câte 7 puncte, astfel încât în fiecare caz să existe câte patru formații de câte trei puncte pe aceeași linie. Găsește apoi o aranjare în care cele 7 puncte să alcătuiască 5 formații de câte trei puncte pe aceeași linie.

6. Arată că, oricum am alege patru numere naturale, există două pentru care diferența pătratelor lor este divizibilă cu 5.

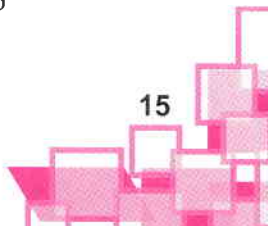
7. Determină tripleta de cifre ($x; y; z$) pentru care numărul

$$a = 100 \cdot [\overline{x, y(z)} + \overline{y, z(x)} + \overline{z, x(y)}]$$

este un pătrat perfect.

8. Arată că:

$$\frac{1970}{197001} + \frac{1971}{197102} + \frac{1972}{197203} + \dots + \frac{2015}{201546} < 0,46$$



9. Dacă a, b, c, d sunt numere naturale nenule, astfel încât $a < c$ și $d < b$, așază în ordine crescătoare fracțiile:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{a+c}{b-d}, \frac{a-c}{b-d}.$$

10. Află cifrele a și b , astfel încât $\frac{3^a \cdot 2^b}{a, b} = 64$.

11. Dacă fracția $\frac{2 \cdot n + 3}{9 \cdot 3 + 11}$, cu $n \in \mathbb{N}$ este reducibilă, află ultima cifră a lui n – număr impar.

12. Am șase coșulețe cu ouă, unele cu ouă de găină, altele cu ouă de rață. Numărul ouălor din coșuri este 5, 6, 12, 14, 23, respectiv 29. Dacă renunț la ouăle dintr-un coșuleț, rămân de două ori mai multe ouă de găină decât de rață. La ce coș ar trebui să renunț?

13. Determină mulțimile A și B , știind că satisfac simultan condițiile:

1) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

2) $A \cap B = \{3; 4\}$

3) $A \cap \{5; 6; 7\} = \emptyset$

4) $\{1; 2\} \cap B \neq \emptyset$

14. Dacă 8 oameni au construit un zid în zece zile, în cât timp vor construi același zid 4 persoane?

a) 20 de zile; b) tot în 10 zile; c) 5 zile; d) alt răspuns.

15. Numerele $\frac{7 \cdot n + 5}{3}$ și $\frac{5 \cdot n + 3}{3}$ sunt numere naturale.

Află restul împărțirii lui n la 12.

16. Un corp de armată a Chinei Imperiale avea în jur de 12 000 de soldați. Se povestește că, vrând să afle numărul lor exact, un general le-a ordonat să se încoloneze câte 8, apoi câte 9, câte 10 și câte 11. În primele trei situații a rămas de fiecare dată un singur soldat răzleț, dar a patra oară a rămas o coloană incompletă cu 9 soldați. Care era numărul soldaților în acel corp de armată?

17. Într-o familie sunt trei frați, toți elevi. Este un obicei al familiei ca la sfârșitul fiecărui an școlar, fiecare copil să primească un număr de cărți egal cu numărul clasei absolvite. După sfârșitul ultimului an școlar, cei trei frați au împreună 72 de cărți.
Ce clasă a absolvit fiecare dintre cei trei frați?
18. Determină numărul fracțiilor ireductibile subunitare care au suma dintre numărător și numitor 2014.
19. Patru băieți: Alin, Barbu, Cornel și Daniel au folosit, la săniuş, câte trei, o sanie cu 3 locuri.
Alin a coborât de cele mai multe ori, de 8 ori, iar Daniel de cele mai puține ori, de 5 ori.
De câte ori a coborât sania de fiecare dată cu câte trei băieți?
20. Cu cifrele 1, 2, 3, 4 și a alcătuieste cel mai mare număr de cinci cifre divizibil cu 36.
21. Află ultima cifră a numărului $12 \cdot n + 5$ cu n număr natural, dacă niciunul dintre numerele n , $2 \cdot n - 1$, $3 \cdot n - 1$ și $6 \cdot n - 1$ nu se divide prin 5.
22. La un concurs participă 20 de elevi. Fiecare trebuie să răspundă la 5 întrebări. Dacă la prima întrebare au răspuns corect 16 elevi, la a doua 14, la a treia 15, iar la a patra 18 și dacă premiul I s-a acordat pentru 5 răspunsuri corecte unui singur elev, află câți elevi au răspuns corect la ultima întrebare.
23. Arată că între două puteri naturale consecutive ale lui 3 se găsește cel puțin o putere și cel mult două puteri ale lui 2.
24. Un test la matematică conține 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 7 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 9 puncte.
După ce a răspuns la un număr de întrebări, nu toate, un elev a acumulat 57 de puncte.
Care-i punctajul maxim care poate să-l obțină?

25. Anul trecut, de ziua lui, Andrei a stins lumânările de pe tortul aniversar astfel: la prima suflare, jumătate din numărul lor, la a doua suflare, $\frac{2}{3}$ din cele rămase, iar ultima oară restul.

Anul acesta, la primele două suflări, Andrei a stins exact același număr de lumânări ca și anul trecut la primele două suflări, dar ultima oară, o treime din cât a stins în primele două suflări.

Câți ani a împlinit Andrei?

26. Câte numere naturale de 5 cifre, având cel puțin două cifre identice, există?

27. Am ales un număr natural de două cifre. Într-o ordine pe care nu o mai rețin, am adunat 17, am scăzut 17, am înmulțit 17 și am împărțit cu 17, astfel că, după cele patru operații efectuate pe rând asupra numărului inițial și respectiv a rezultatelor intermediare, am obținut numărul 172.

Ce număr am ales inițial?

28. Aranjează numerele naturale de la 1 la 100 în linie, astfel încât diferența dintre două numere alăturate să fie 2 sau 3.

29. La un concurs de matematică participă 100 de elevi, proba constând în găsirea răspunsului la trei întrebări.

În total s-au primit 200 de răspunsuri corecte.

Arată că există 34 de elevi care au răspuns corect la aceleași două întrebări.

30. Vom numi „civilizat” un număr care nu se împarte cu rest 0 la niciuna dintre cifrele sale.

Refă înmulțirea alăturată în care atât cei doi factori, cât și produsul, sunt numere „civilizate”.

$$23* \cdot *9 = ****$$

31. Fiecare elev al unei clase a mers în cel puțin una dintre cele două excursii organizate de școală.

Atât în prima, cât și în a doua excursie, numărul băieților a fost mai mic cu $\frac{2}{5}$ din numărul total al participanților lor. Arată că în acea

clasă băieții reprezintă mai puțin decât $\frac{4}{7}$ din numărul total al elevilor clasei.

- 32.** Într-o țară ciudată se folosesc doar trei monede de valori, bineînțeles, diferite. La terminarea vizitei din acea țară, Radu mai avea 4 monede în valoare de 28 nemo, iar Răzvan 5 monede valorând în total 21 nemo. Ceea ce mai știm este că fiecare dintre ei avea cel puțin o monedă din fiecare din cele trei tipuri. Ce valori au monedele din țara respectivă?

- 33.** *O problemă din 1938*

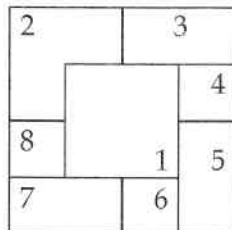
Cinci răufăcători au găsit un portmoneu plin cu ruble. Cel mai puternic dintre ei și-a însușit 810 ruble, ceilalți patru luând sume diferite. Din cauza împărțelii, între ei s-a iscat o ceartă și cel „mai bogat” a hotărât să dubleze celorlalți numărul de ruble. Cum nici această împărțea nu le-a convenit unora, cel care a devenit „cel mai bogat”, în acel moment, a dublat acum sumele celorlalți patru. Din nou, cearta l-a determinat pe „cel mai bogat” să dubleze sumele celorlalți patru și tot așa. A urmat ca al patrulea și al cincilea au dublat, pe rând, suma celorlalți patru, astfel că, în final, toți cei cinci aveau aceeași sumă de ruble. Câte ruble au găsit cei cinci în portmoneu?

- 34.** Doi călători au plecat în același moment din localitățile A și B unul spre celălalt, fiecare deplasându-se cu viteza lui constantă. S-au întâlnit la ora 13 și, continuându-și drumul, primul a ajuns în B la ora 17, iar al doilea în A la ora 22. Știi la ce oră au pornit unul spre celălalt?

- 35.** Calculează suma cifrelor numerelor

1, 2, 3, ..., 998, 999, 1000.

- 36.** Opt bucăți de carton de formă pătrată și de aceleași dimensiuni, numerotate de la 1 la 8, au fost așezate una peste alta astfel încât „stiva” arată ca în figura alăturată. Poți să găsești ordinea în care au fost așezate cele 8 pătrate?



Numerele naturale și operații cu ele

Scierea numerelor naturale în alte baze decât 10, scrierea sub formă de puteri, sub formă de sume, produse este o sursă inepuizabilă de descoperire de noi proprietăți, producătoare de noi întrebări, generatoare de probleme noi.

1. Dacă tăiem prima și ultima cifră a unui număr natural de 4 cifre, obținem un număr de 46 ori mai mic.
Găsește numărul.
2. Determină numărul natural n care:
a) dacă-l împart la 4, obțin restul 3;
b) dacă-l împart la 10, obțin restul 1;
c) dacă-l împart la 12, obțin restul 3,
iar suma câturilor celor trei împărțiri este cu 16 mai mare decât o treime din n .
3. Un număr natural n scris în baza 10 are suma cifrelor 2018. Determină suma cifrelor numărului $n + 7$.
4. Numerele naturale a, b, c au proprietatea ca, la împărțirea fiecăruia la 201, se obțin resturile 10, 30, respectiv 60.
Află restul împărțirii la 201 a numărului $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c$.
5. Calculează suma cifrelor numărului:
$$N = 2^{2013} \cdot 25^{1006} - 2013$$
6. Fie cinci numere naturale consecutive. Diferența dintre produsul ultimelor patru și produsul primelor patru este 240.
Află numerele.
7. Se dau patru numere naturale 62, 182, 242 și 260, care sunt rezultatele produsului unui număr cu suma celorlalte trei.
Care sunt cele patru numere?

8. Determină cel mai mare număr de patru cifre care: împărțit la 3 dă restul 1, împărțit la 5 dă restul 2 și împărțit la 7 dă restul 3.
9. Care este numărul natural de ordinul sutelor de mii care are proprietatea că, dacă mutăm prima cifră la sfârșitul numărului, obținem un număr de $\frac{7}{2}$ ori mai mare?
10. Dovedește că a, b, c și d sunt numere naturale nenule și

$$(a + 1) \cdot (b + 3) \cdot (c + 7) \cdot (d + 15) \leq 2^{10}$$
11. Verifică dacă există numere naturale $\overline{abcd}$ cu proprietățile:
 1. $\overline{abcd} = \overline{cb}^2$
 2. Cifrele a, b, c și d sunt consecutive, într-o ordine oarecare.
12. Care sunt ultimele cinci cifre ale numărului:

$$7^{2012} + 7^{2013} + 7^{2014} + 7^{2015} ?$$
13. Pentru un număr de două cifre se calculează produsul cifrelor sale. Se repetă procedeul până când se obține un număr de o singură cifră.
Pentru câte numere de două cifre rezultatul final este 0?
14. Calculează câtul și restul împărțirii numărului:

$$\underbrace{100\dots 0}_{2015 \text{ de } 0} \text{ la } 1111$$
15. Împărțind numărul natural x la un număr natural y , obținem câtul 3 și restul 19.
 - a) Calculează $2 \cdot x - 6 \cdot y + 3$.
 - b) Arată că $x + y > 95$.
 - c) Află x și y , dacă $x - y < 61$.
16. Într-un șir de numere naturale consecutive, suma dintre primul termen și ultimul este 676, iar suma ultimelor trei termeni este 2007. Câți termeni are șirul?

17. Numerele n , $n + 1$ și $n + 2$ se împart pe rând la un număr de două cifre, iar suma resturilor obținute este 101.
Care este restul împărțirii lui n la 52?
18. Utilizând toate cifrele de la 1 la 8 câte o singură dată, am scris două numere, un pătrat perfect și un cub perfect al aceluiași număr.
Care?
19. Determină tripletele de numere naturale $(a; b; c)$ care satisfac simultan relațiile:
 $a - 2 \cdot c \geq 1$; $b - c \leq 1$; $2 \cdot b - a \geq 1$ și $a + b + c \leq 10$.
20. Determină cel mai mic număr natural divizibil cu 65, care, împărțit la 27, dă restul 13.
21. Află cel mai mare număr natural de cinci cifre, care, împărțit la primele 10 numere naturale pare (nenule), dă resturi numere naturale impare diferite.
22. Care este cel mai mic multiplu al numărului 999 care **nu conține** cifra 9?
23. Numărul $\overline{abcde5}$ se divide cu produsul $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$. Arată că cel puțin două dintre cifrele a, b, c, d, e sunt egale.
24. Un număr natural se numește „vrednic” dacă poate fi scris atât ca sumă a două numere naturale consecutive, cât și ca sumă a trei numere naturale consecutive.
Arată că produsul oricăror două numere „vrednice” este „vrednic”.
25. Ceasul meu electronic afișează timpul sub forma $\overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot \overline{ef}$, de la 00.00.00 până la 23.59.59.
De câte ori în cursul unei zile afișează trei cifre de 7?
26. Fie n un număr natural nenul.
Arată că există cel puțin trei puteri ale lui 2 care se scriu în baza 10 cu n cifre.

27. Arată că oricare ar fi 7 numere naturale, printre ele există 4 cu suma divizibilă cu 4.
28. De câte pătrate perfecte consecutive avem nevoie pentru a avea certitudinea că printre ele există unul ale cărui ultime două cifre sunt din mulțimea $\{0; 2; 5; 7\}$?
29. Arată că oricare ar fi m și n numere naturale, numerele $11^m + 5^n$ și $11^m - 5^n$ nu pot fi simultan pătrate perfecte.
30. Determină cel mai mic pătrat perfect care, împărțit pe rând la 3, 4, 5, ..., 11, 12, dă resturile 1, 2, 3, ..., 9, respectiv 10.
31. Arată că suma dintre numărul 1 și produsul primelor n numere prime nu este un pătrat perfect, oricare ar fi n .
32. Există pătrate perfecte de forma $\overline{aabbcc}$?
33. Arată că dacă p este un pătrat perfect de nouă cifre, dintre care una nu este 3, atunci p are cel puțin două cifre identice.
34. Se dă mulțimea $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2012}; a_{2013}\}$, unde $a_1 = 1; a_2 = 7; a_3 = 17; a_4 = 717; a_5 = 17717; a_6 = 71717717 \dots$. Fiecare element al mulțimii este un număr format din „lipirea” celor două numere din fața sa.
Află:
a) câte cifre are a_{11} ; b) a 16-a cifră a lui a_{2013} ; c) a 20-a cifră a lui a_{2012} .
35. Monica a scris pe tablă înmulțirea:
$$582 \cdot 4 = 1122$$

Pentru a obține o înmulțire corectă trebuie să adauge sau să scadă 1 din fiecare dintre cele 8 cifre scrise.
Care este rezultatul înmulțirii corecte?
36. Arată că, dintre oricare patru cuburi perfecte, putem alege două a căror diferență se divide cu 7.
37. Arată că, pentru orice număr natural nenul n , există un cub perfect cu exact n cifre de zero, în scrierea sa în baza 10.